

# Herleitung der ersten Approximation der Theorie elastischer Schalen

Zerna, W.

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 19, 1967,  
S. 52-71



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# Herleitung der ersten Approximation der Theorie elastischer Schalen

Von W. Zerna

(Eingegangen am 14. 2. 1967)

**Übersicht:** Für die Theorie elastischer Schalen wird das Problem der ersten Approximation behandelt und gezeigt, wie diese systematisch abgeleitet werden kann, ohne Gebrauch zu machen von den üblichen unbefriedigenden Annahmen.

*Summary:* For the theory of elastic shells the problem of the first approximation is treated and shown, how to derive it systematically without the usual unsatisfactory assumptions.

Seit A. E. H. Love in seinem vor mehr als einem halben Jahrhundert erschienenen Buch [1] die sogenannte erste und zweite Approximation in die Theorie elastischer Schalen eingeführt hat, haben die Auseinandersetzungen über die Bedeutung dieser Näherungen und ihr Einfluß auf die Schalengleichungen kein Ende gefunden. Die Anzahl der Arbeiten, die sich mit der Aufstellung mehr oder weniger systematischer Schalentheorien befassen und die Annahmen und Näherungen diskutieren, ist fast unübersehbar<sup>1)</sup>. Insbesondere ist immer wieder versucht worden, die üblicherweise eingeführten Annahmen besser zu begründen. So sind Betrachtungen über die Größenordnung einzelner Ausdrücke angestellt worden, um Rechtfertigungen für gewisse Vernachlässigungen zu finden [4]. Andere Autoren [3] sind ausgehend von der dreidimensionalen Elastizitätstheorie mit Hilfe von asymptotischen Reihenentwicklungen zu systematischen Näherungen vorgedrungen. Dieser vielversprechende Weg erfordert allerdings einen erheblichen Aufwand und enthält zum Teil nicht leicht einzusehende Voraussetzungen, da mit „gewogenen“ Größen gearbeitet wird und die Wahl der „Gewichte“ manchmal etwas willkürlich erscheint.

Welcher Weg auch immer beschritten wird, es scheint festzustehen, daß sich jede Art von Schalentheorie mit einer Näherung zufrieden geben muß, die als erste Approximation anzusprechen ist. Zwar lassen sich ziemlich allgemeine Theorien aufstellen [5], sie haben aber keinerlei Bedeutung für praktische Aufgaben, da die mathematischen Schwierigkeiten ins Unermeßliche wachsen.

Wie die Schalengleichungen für eine erste Approximation auszusehen haben, steht inzwischen zweifelsfrei fest. Es fehlt jedoch ihre übersichtliche Herleitung, die ohne fragwürdige Annahmen auskommt. Diesem Mangel soll mit der vorliegenden Arbeit abgeholfen werden.

Wie heute allgemein üblich bei derartigen Betrachtungen, wird die Tensor-schreibweise in der von Ricci angegebenen Form benutzt. Die Bezeichnungen

<sup>1)</sup> Die unter [2] und [3] genannten Arbeiten in der Literaturübersicht enthalten umfangreiche Schrifttumverzeichnisse.

stimmen im wesentlichen überein mit denen im Buch von *Green* und *Zerna* [6], an das sich die Arbeit auch sonst eng anschließt.

Lateinische Buchstaben als Indizes durchlaufen die Ziffern 1, 2, 3. Griechische Buchstaben als Indizes durchlaufen die Ziffern 1, 2. Über doppelt auftretende gleiche Indizes ist zu summieren. Das Kronecker Delta  $\delta_{\beta}^{\alpha}$  bedeutet:  $\delta_1^1 = \delta_2^2 = 1$ ,  $\delta_2^1 = \delta_1^2 = 0$ .

## 1. Geometrische Beziehungen

Der Ortsvektor der Mittelfläche einer Schale sei mit  $L\mathbf{r}$  bezeichnet<sup>1)</sup>, worin  $\mathbf{r}$  eine dimensionslose Vektorgröße und  $L$  eine charakteristische Längenabmessung angibt. Werden die Punkte der Mittelfläche durch allgemeine krummlinige Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  bestimmt, so gilt:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2). \quad (1.1)$$

Der zur Mittelfläche normal gerichtete Einheitsvektor (Normalvektor) werde durch  $\mathbf{a}$  gekennzeichnet. Der in seiner Richtung gemessene Abstand eines Punktes von der Mittelfläche sei  $z$ , so daß  $z = 0$  die Mittelfläche ergibt. Es wird vorausgesetzt, daß die Schalendicke  $t$  unveränderlich ist. Die Koordinate  $z$  liegt in dem Intervall

$$-\frac{t}{2} \leq z \leq +\frac{t}{2}. \quad (1.2)$$

Die beiden durch (1.2) beschriebenen begrenzenden Flächen des Schalenkörpers stellen die Schalenlaibungen dar.

Der Ortsvektor  $\mathbf{R}$  eines Schalenpunktes läßt sich durch

$$\mathbf{R} = L\mathbf{r} + z\mathbf{a} \quad (1.3)$$

darstellen (Abb. 1).

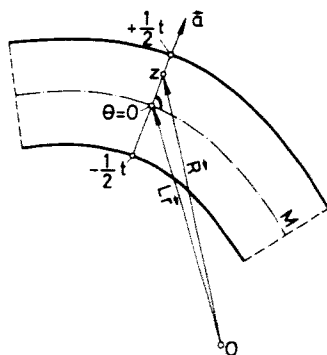


Abb. 1. Zur Geometrie der Schale

<sup>1)</sup> Die symbolische Schreibweise von Vektoren wird durch halbfette Kursivbuchstaben angezeigt.

Es ist zweckmäßig, dimensionslose Koordinaten einzuführen. Es wird deshalb gesetzt:

$$\Theta_1 = \frac{x_1}{L_1}, \quad \Theta_2 = \frac{x_2}{L_2}, \quad \Theta_3 = \Theta = \frac{z}{t}. \quad (1.4)$$

Die in (1.4) eingeführten konstanten Größen  $L_1, L_2$  und die bereits früher erwähnte charakteristische Länge  $L$  sollen so gewählt werden, daß die Absolutbeträge von allen auf  $\mathbf{r}$  bezogenen geometrischen Größen höchstens die Größe Eins annehmen. Es ist leicht einzusehen, daß dies immer gelingt.

Der Ortsvektor (1.3) eines Schalenpunktes nimmt mit (1.4) die Form

$$\mathbf{R} = L[\mathbf{r}(\Theta_1, \Theta_2) + \lambda \Theta \mathbf{a}(\Theta_1, \Theta_2)] \quad (1.5)$$

an, worin

$$\lambda = \frac{t}{L} \quad (1.6)$$

eine dimensionslose Konstante ist.

Der mit (1.1) definierten Fläche

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\Theta_1, \Theta_2)$$

sind zugeordnet:

Basisvektoren  $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r},_{\alpha}, \quad \checkmark$

Maßtensor  $a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, \quad \checkmark$

Krümmungstensor  $b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a},_{\beta}.$

Es bedeutet

$$(\quad),_{\alpha} = \frac{\partial(\quad)}{\partial \Theta_\alpha}, \quad (\quad),_3 = \frac{\partial(\quad)}{\partial \Theta}.$$

Die kovarianten Basisvektoren des durch (1.5) bestimmten Schalenraumes ergeben sich zu

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g}_\alpha &= \mathbf{R},_{\alpha} = L \mu_\alpha^0 \mathbf{a}_\alpha, \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{R},_3 = \lambda L \mathbf{a}, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

worin

$$\mu_\alpha^0 = \delta_\alpha^0 - \lambda \Theta b_\alpha^0. \quad (1.8)$$

Die Komponenten des Maßtensors des Schalenraumes betragen

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = L^2 c_{\alpha\beta}, \quad (1.9)$$

$$g_{\alpha 3} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_3 = 0, \quad (1.10)$$

$$g_{33} = \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = \lambda^2 L^2, \quad (1.11)$$

mit

$$c_{\alpha\beta} = \mu_\alpha^\lambda \mu_\beta^\lambda = a_{\alpha\beta} - 2\lambda \Theta b_{\alpha\beta} + \lambda^2 \Theta^2 b_\beta^\lambda b_{\lambda\alpha}, \quad (1.12)$$

worin in Übereinstimmung mit (1.8)

$$\mu_{\lambda\beta} = a_{\lambda\beta} - \lambda \Theta b_{\lambda\beta}. \quad (1.13)$$

Werden die Determinanten

$$a = |a_{\alpha\beta}|, \quad g = |g_{\alpha\beta}|$$

eingeführt, gilt die Beziehung

$$h = \sqrt{\frac{g}{a}} = \lambda L^3 h^* \quad (1.14)$$

mit

$$h^* = 1 - 2\lambda\Theta H + \lambda^2\Theta^2 K. \quad (1.15)$$

Darin bezeichnen

$2H = b_1^1 =$  mittlere Krümmung,

$K = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 =$  Gaußsche Krümmung.

Schließlich wird zum späteren Gebrauch noch der  $\varepsilon$ -Tensor  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  bzw.  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  angegeben:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} &= 0, \\ \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} &= \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{a}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

## 2. Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement (dreidimensional)

Die an einer Koordinatenfläche  $\Theta_i = \text{const.}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) wirkenden Spannungen lassen sich durch den Spannungstensor

$$t_i \sqrt{g^{ii}} = \tau^{ik} g_k \quad (2.1)$$

darstellen, worin  $\tau^{ik}$  den (dreidimensionalen) Spannungstensor angibt. Mit (1.7) und (1.8) geht (2.1) über in

$$t_i \sqrt{g^{ii}} = L \{ \mu_x^e \tau^{ix} a_e + \lambda \tau^{i3} a \}. \quad (2.2)$$

Es wird nun die Vektorgroße

$$T_i = \sqrt{g g^{ii}} t_i \quad (2.3)$$

eingeführt, die mit (1.7), (1.14) und (2.2) wie folgt geschrieben wird

$$T_x = L \sqrt{a} \{ \sigma^{xe} a_e + \lambda \sigma^{x3} a \}, \quad (2.4)$$

$$T_3 = L \sqrt{a} \{ \sigma^{3e} a_e + \lambda \sigma^{33} a \}. \quad (2.5)$$

Darin ist

$$\sigma^{ie} = h \mu_x^e \tau^{ix} \quad (2.6)$$

$$\sigma^{33} = h \tau^{33}. \quad (2.7)$$

Aus der Symmetrie des Spannungstensors folgt

$$\sigma^{3e} = \mu_\lambda^e \sigma^{i3} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{\lambda\beta} \mu_\alpha^1 \sigma^{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\lambda\beta} \sigma^{\lambda\beta} - \lambda \Theta \varepsilon_{\lambda\beta} b_2^1 \sigma^{x\beta} = 0. \quad (2.9)$$

Es ist zweckmäßig, den unsymmetrischen Tensor  $\sigma^{x\beta}$  aufzuspalten in seinen symmetrischen Teil

$$\sigma^{(x\beta)} = \sigma^{(\beta x)} \quad (2.10)$$

und seinen antimetrischen Teil

$$\sigma^{[\alpha\beta]} = -\sigma^{[\beta\alpha]}, \quad (2.11)$$

so daß

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{(\alpha\beta)} + \sigma^{[\alpha\beta]}, \quad (2.12)$$

Dies in (2.9) berücksichtigt liefert

$$\sigma^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(\sigma^{\alpha\beta} - \sigma^{\beta\alpha}) = \frac{\lambda}{2}\Theta\{\sigma^{\lambda\beta}b_{\lambda}^{\alpha} - \sigma^{\lambda\alpha}b_{\lambda}^{\beta}\}. \quad (2.13)$$

Mit Hilfe von (2.4) und (2.5) lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen an einem aus der Schale herausgeschnittenen Volumenelement durch die vektorielle Beziehung

$$\mathbf{T}_{\alpha,\alpha} + \mathbf{T}_{3,3} = 0 \quad (2.14)$$

ausdrücken, die der Komponentendarstellung

$$\sigma^{\alpha\varrho}|_{\alpha} - \lambda b_{\alpha}^{\varrho}\sigma^{\alpha 3} + \sigma^{3\varrho}|_3 = 0, \quad (2.15)$$

$$b_{\varrho\alpha}\sigma^{\alpha\varrho} + \lambda\sigma^{\alpha 3}|_{\alpha} + \lambda\sigma^{33}|_3 = 0 \quad (2.16)$$

entspricht (senkrechte Striche zeigen kovariante Differentiation bezüglich der Koordinaten an).

### 3. Schnittgrößen

Die über die Koordinatenflächen  $\Theta_{\alpha} = \text{const.}$  verteilten Spannungen werden zu Schnittgrößen (Spannungsergebnissen) zusammengefaßt. Es werden folgende Größen eingeführt:

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sigma^{\alpha\beta} d\Theta, \quad (3.1)$$

$$m^{\alpha\beta} = \lambda \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sigma^{\alpha\beta} \Theta d\Theta, \quad (3.2)$$

$$q^{\alpha} = \lambda \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sigma^{\alpha 3} d\Theta, \quad (3.3)$$

$$l^{\alpha} = \lambda^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sigma^{\alpha 3} \Theta d\Theta, \quad (3.4)$$

$$T = \lambda^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sigma^{33} d\Theta. \quad (3.5)$$

Darin bedeuten  $n^{\alpha\beta}$  den (nichtsynchronen) Längskrafttensor,  $m^{\alpha\beta}$  den (nichtsynchronen) Momententensor,  $q^\alpha$  den Querkraftvektor. Der Vektor  $l^\alpha$  und das Skalar  $T$  sind anschaulich nicht ohne weiteres deutbar. Diese Größen treten in der üblichen Schalentheorie nicht auf.

Der Längskrafttensor wird in seinen symmetrischen Teil

$$n^{(\alpha\beta)} = n^{(\beta\alpha)} \quad (3.6)$$

und seinen antisymmetrischen Teil

$$n^{[\alpha\beta]} = -n^{[\beta\alpha]} \quad (3.7)$$

aufgespalten, so daß

$$n^{\alpha\beta} = n^{(\alpha\beta)} + n^{[\alpha\beta]}. \quad (3.8)$$

Im Hinblick auf (2.12) und (2.13) ergibt sich mit (3.1) und (3.2)

$$n^{(\alpha\beta)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sigma^{(\alpha\beta)} d\Theta, \quad (3.9)$$

$$n^{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} \{ b_\lambda^\alpha m^{\lambda\beta} - b_\lambda^\beta m^{\lambda\alpha} \}. \quad (3.10)$$

#### 4. Belastung

Die an den Schalenlaibungen wirkenden Kräfte werden zu einer resultierenden Kraft  $\mathbf{p}$  und einem resultierenden Moment  $\mathbf{c}$  jeweils bezogen auf die Flächeneinheit der Mittelfläche ersetzt. Wenn  $df$  das Flächenelement der Mittelfläche und  $dF$  das Flächenelement der im Abstand  $z$  von der Mittelfläche verlaufenden Fläche bezeichnen, so folgt aus den Randbedingungen an den Schalenlaibungen

$$\mathbf{p} df = [\mathbf{t}_3 dF]_{\theta = -\frac{1}{2}}^{\theta = +\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{c} df = [z\mathbf{a} \times \mathbf{t}_3 dF]_{\theta = -\frac{1}{2}}^{\theta = +\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

Der Belastungsvektor  $\mathbf{p}$  und der Momentenvektor  $\mathbf{c}$  werden durch Komponenten ausgedrückt:

$$L\mathbf{p} = p^e \mathbf{a}_e + p\mathbf{a}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{c} = c^e \mathbf{a} \times \mathbf{a}_e. \quad (4.4)$$

Werden in (4.1) und (4.2) die Beziehung (2.2) eingesetzt, (2.6) und (2.7) beachtet und berücksichtigt, daß

$$\begin{aligned} df &= L^2 \sqrt{a} d\Theta^1 d\Theta^2, \\ dF &= \frac{1}{\lambda L} \sqrt{g} d\Theta^1 d\Theta^2 \end{aligned}$$

so ergeben sich folgende Ausdrücke für die in (4.3) und (4.4) eingeführten Komponenten der Belastungsgrößen:

$$p^{\theta} = [\sigma^{3\theta}]_{\theta = -\frac{1}{2}}^{\theta = +\frac{1}{2}}, \quad (4.5)$$

$$p = \lambda[\sigma^{33}]_{\theta = -\frac{1}{2}}^{\theta = +\frac{1}{2}}, \quad (4.6)$$

$$c^{\theta} = \lambda[\Theta\sigma^{3\theta}]_{\theta = -\frac{1}{2}}^{\theta = +\frac{1}{2}}. \quad (4.7)$$

Die Ausdrücke (4.5) bis (4.7) geben den Zusammenhang zwischen den auf die Schalenmittelfläche bezogenen Lastgrößen und den Randbedingungen an den Schalenlaibungen an.

### 5. Gleichgewichtsbedingungen am Schalenelement (zweidimensional)

Die dreidimensionalen Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement (2.15) und (2.16) werden bezüglich  $\Theta$  über die Schalendicke, d. h. von  $\Theta = -\frac{1}{2}$  bis  $\Theta = +\frac{1}{2}$  integriert. Unter Verwendung der Schnittgrößen (3.1) bis (3.3) und der Belastungsgrößen (4.5) und (4.6) ergibt sich

$$n^{\alpha\beta}|_x - b_{\alpha}^{\beta} q^{\alpha} + p^{\beta} = 0, \quad (5.1)$$

$$n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + q^x|_x + p = 0. \quad (5.2)$$

Nun werden die Gleichungen (2.15) und (2.16) mit  $\Theta$  multipliziert und wiederum bezüglich  $\Theta$  von  $\Theta = -\frac{1}{2}$  bis  $\Theta = +\frac{1}{2}$  integriert. Dies liefert mit Benutzung der Schnittgrößen (3.1) bis (3.5) und der Belastungsgrößen (4.7) folgende Gleichungen:

$$m^{\alpha\beta}|_x - q^{\beta} + c^{\beta} = 0, \quad (5.3)$$

$$m^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + l^x|_x + \bar{p} - T = 0. \quad (5.4)$$

Die in (5.4) neu auftretende Größe  $\bar{p}$  bedeutet

$$\bar{p} = \lambda^2[\Theta\sigma^{33}]_{\theta = -\frac{1}{2}}^{\theta = +\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

und hängt mit den Randbedingungen an den Schalenlaibungen bzw. den Belastungsgrößen wie folgt zusammen.

Bezeichnet  $K$  die an der Laibung  $\Theta = +\frac{1}{2}$  angreifende Lastgröße in Norma-



lenrichtung und  $k$  den entsprechenden Wert an der Laibung  $\Theta = -\frac{1}{2}$ , so gilt gemäß (4.6)

$$\lambda [\sigma^{33}]_{\Theta = +\frac{1}{2}} = K,$$

$$\lambda [\sigma^{33}]_{\Theta = -\frac{1}{2}} = k$$

und damit

$$p = K - k,$$

$$\bar{p} = \frac{\lambda}{2} (K + k).$$

Da es in der hier aufzustellenden Theorie unerheblich ist, wie die Belastung auf die beiden Laibungen der Schale sich verteilt, kann willkürlich gesetzt werden

$$k \equiv 0,$$

so daß dann

$$\bar{p} = \frac{\lambda}{2} p. \quad (5.6)$$

Aus (2.9) folgt noch die Beziehung

$$\varepsilon_{\lambda\beta} n^{\lambda\beta} - \varepsilon_{\lambda\beta} m^{\alpha\beta} b_{\alpha}^{\lambda} = 0, \quad (5.7)$$

die mit der Aussage, daß der Spannungstensor  $\tau^{\alpha\beta} = \tau^{\beta\alpha}$  symmetrisch ist, übereinstimmt und daher keine neue Gleichung liefert.

Die Gleichungen (5.1) bis (5.4) sind zweidimensional. Die Koordinate  $\Theta$  ist mit Hilfe des Integrationsprozesses eliminiert worden. Die Gleichungen (5.1) bis (5.3) stellen die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben und Verdrehen des Schalelementes dar. Die Gleichung (5.4) ist formal entstanden und hat keine anschauliche Bedeutung im üblichen Sinn, sie tritt in der bisherigen Schalentheorie nicht auf. Hingegen ist die Gleichung (5.7) bei allen Ableitungen der Schalentheorie zu finden. Sie behandelt das Gleichgewicht bezüglich Verdrehen um die Schalennormalen, was aber bereits durch die Symmetrie des Spannungstensors ausgedrückt wird, so daß diese Gleichung überflüssig ist.

## 6. Verformungszustand

Es werde ein Punkt  $A$  der unverformten Schale betrachtet. Er liege im Abstand  $z$  von der Mittelfläche, so daß von dem Fußpunkt  $M$  des Lotes von  $A$  auf die Mittelfläche der Vektor  $z\mathbf{a}$  von  $M$  nach  $A$  führt (Abb. 2). Nach der Verformung der Schale gehe  $A$  in  $\tilde{A}$  und  $M$  in  $\tilde{M}$  über. Der Vektor, der  $M$  mit  $\tilde{M}$  verbindet, ist der Verschiebungsvektor der Mittelfläche, er werde mit  $L\mathbf{r}$  bezeichnet. Der Verschiebungsvektor, der den Weg des Punktes  $\tilde{A}$  nach  $A$  angibt, sei  $\mathbf{V}$ . In  $\tilde{M}$  werde der Vektor  $z\tilde{\mathbf{a}}$  errichtet, wobei  $\tilde{\mathbf{a}}$  den Normalenvektor der verformten Mittelfläche angibt. Vom Endpunkt des Vektors  $z\tilde{\mathbf{a}}$  zum Punkt  $\tilde{A}$  führe der

Vektor  $LW$ . Dieser Vektor gibt also an, in welchem Maße ein Punkt, der sich vor der Verformung im Abstand  $z$  auf einer Normalen zur Mittelfläche befunden hat, nach der Verformung von dem entsprechenden im Abstand  $z$  von der verformten Mittelfläche gelegenen Punkt entfernt hat. Wird wie in der üblichen Schalentheorie angenommen, daß Punkte, die vor der Verformung im Abstand  $z$  auf einer Schalennormalen liegen, auch nach der Verformung wiederum im Abstand  $z$  auf der entsprechenden Normalen der verformten Schale liegen (Bernoullische Hypothese), so würde  $W = 0$  sein. Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß von dieser Annahme im folgenden kein Gebrauch gemacht wird.

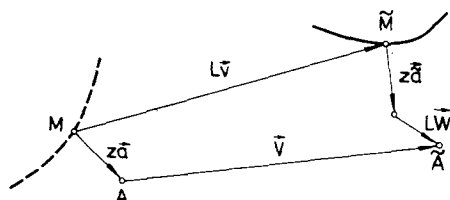


Abb. 2. Verformungszustand

Aus Bild 2 kann sofort abgelesen werden

$$V = Lv + z(\tilde{a} - a) + LW.$$

Mit

$$\tilde{a} = a + w \quad (6.1)$$

wird daraus bei Beachtung von (1.4) und (1.6)

$$V = L(v + \lambda \Theta w + W). \quad (6.2)$$

Darin sind  $v$  und  $w$  Funktionen der Flächenkoordinaten  $\Theta_1, \Theta_2$ , während  $W$  eine Funktion aller drei Koordinaten  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta$  ist.

Die in (6.2) auftretenden Vektoren werden durch ihre Komponenten dargestellt:

$$v = v_x a^x + w a, \quad (6.3)$$

$$w = w_x a^x, \quad (6.4)$$

$$W = W_x a^x + W a. \quad (6.5)$$

Es läßt sich zeigen, daß die Beziehung

$$w_x = -w_{,x} - b_x^\lambda v_\lambda \quad (6.6)$$

gilt.

Für die Ableitungen der Flächenvektoren (6.3) und (6.4) nach den Koordinaten ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$v_{,x} = (v_\lambda|_x - b_{\lambda x} w) a^\lambda + (w_{,x} + b_x^\alpha v_\alpha) a, \quad (6.7)$$

$$w_{,x} = w_{\alpha|_x} a^\alpha + b_x^\alpha w_\alpha a. \quad (6.8)$$

## 7. Verzerrungszustand

Der Verzerrungstensor wird durch den Verschiebungsvektor bestimmt. Es gilt

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{V}_{,k} + \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{V}_{,i} \}. \quad (7.1)$$

Wird darin (1.7) und (6.2) eingesetzt, ergeben sich folgende Ausdrücke

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{L^2}{2} \{ \mu_\alpha^\lambda \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{V}_{,\beta} + \mu_\beta^\lambda \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{V}_{,\alpha} \} \quad (7.2)$$

oder

$$\gamma_{\alpha\beta} = L^2 \{ \chi_{\alpha\beta} + \lambda \Theta \omega_{\alpha\beta} + \lambda^2 \Theta^2 \beta_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \} \quad (7.3)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{v}_{,\alpha} \} \\ &= \frac{1}{2} (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} - 2b_{\alpha\beta} w) \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{w}_{,\beta} + \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{w}_{,\alpha} - b_\alpha^\lambda \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{v}_{,\beta} - b_\beta^\lambda \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{v}_{,\alpha} \} \\ &= \frac{1}{2} (w_{\alpha|\beta} + w_{\beta|\alpha} - b_\alpha^\lambda v_{\lambda|\beta} - b_\beta^\lambda v_{\lambda|\alpha} + 2b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} w) \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

$$\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{ b_\alpha^\lambda \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{w}_{,\beta} + b_\beta^\lambda \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{w}_{,\alpha} \} \quad (7.6)$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{W}_{,\beta} + \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{W}_{,\alpha} - \lambda \Theta [b_\beta^\lambda \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{W}_{,\beta} + b_\beta^\lambda \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{W}_{,\alpha}] \}. \quad (7.7)$$

Weiterhin ergibt sich für die übrigen Komponenten des Verzerrungstensors:

$$\gamma_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{V}_{,3} + \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{V}_{,\alpha} \},$$

mit (1.7) und (6.2) wird

$$\gamma_{\alpha 3} = \frac{L^2}{2} \{ \mu_\alpha^\rho \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{W}_{,3} + \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{W}_{,\alpha} \} \quad (7.8)$$

und schließlich

$$\gamma_{33} = \lambda L^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{V}_{,3}$$

oder mit (6.2)

$$\gamma_{33} = \lambda L^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{W}_{,3}. \quad (7.9)$$

Es ist nicht verwunderlich, daß  $\gamma_{\alpha 3}$  und  $\gamma_{33}$  nur von dem Verschiebungsvektor  $\mathbf{W}$  abhängen, da dieser gemäß (6.2) so eingeführt worden ist, daß bei seinem Verschwinden  $\gamma_{\alpha 3}$  und  $\gamma_{33}$  zu Null werden müssen.

## 8. Spannungs-Verzerrungsbeziehungen

Zwischen dem Spannungstensor  $\tau^{ik}$  und dem Verzerrungstensor  $\gamma_{rs}$  besteht nach dem HOOKEschen Gesetz folgender Zusammenhang für isotropen Werkstoff:

$$E\gamma_{rs} = \{(1 + \nu)g_{ir}g_{ks} - \nu g_{ik}g_{rs}\} \tau^{ik}, \quad (8.1)$$

worin  $E$  den Elastizitätsmodul und  $\nu$  die Querkontraktionsziffer bezeichnen. Aus (8.1) folgt

$$E\gamma_{\alpha\beta} = \{(1 + \nu)g_{\alpha\alpha}g_{\lambda\beta} - \nu g_{\alpha\beta}g_{\alpha\lambda}\} \tau^{\alpha\lambda} - \nu g_{33}g_{\alpha\beta} \tau^{33}, \quad (8.2)$$

$$E\gamma_{\alpha 3} = (1 + \nu)g_{\alpha\alpha}g_{33} \tau^{\alpha 3}, \quad (8.3)$$

$$E\gamma_{33} = g_{33}g_{33} \tau^{33} - \nu g_{\alpha\lambda}g_{33} \tau^{\alpha\lambda}. \quad (8.4)$$

Die Beziehungen (8.2) bis (8.4) werden mit  $h$  gemäß (1.14) multipliziert. Bei Beachtung von (2.6) und (2.7) ergibt sich dann

$$Eth^* \gamma_{\alpha\beta} = L^2 A_{\alpha\beta\alpha\lambda} \sigma^{\alpha\lambda} - \nu \lambda^2 L^2 c_{\alpha\beta} \sigma^{33} \quad (8.5)$$

mit

$$A_{\alpha\beta\lambda\mu} = A_{\alpha\beta\lambda\mu}^{(0)} + \lambda \Theta A_{\alpha\beta\lambda\mu}^{(1)} + \lambda^2 \Theta^2 A_{\alpha\beta\lambda\mu}^{(2)} + \lambda^3 \Theta^3 A_{\alpha\beta\lambda\mu}^{(3)}, \quad (8.6)$$

worin

$$A_{\alpha\beta\lambda\mu}^{(0)} = \frac{1 + \nu}{2} (a_{\alpha\lambda} a_{\mu\beta} + a_{\alpha\mu} a_{\lambda\beta}) - \nu a_{\alpha\beta} a_{\lambda\mu}, \quad (8.7)$$

$$A_{\alpha\beta\lambda\mu}^{(1)} = -\frac{1 + \nu}{2} (a_{\alpha\lambda} b_{\mu\beta} + a_{\alpha\mu} b_{\lambda\beta} + 2b_{\alpha\lambda} a_{\mu\beta} + 2b_{\alpha\mu} a_{\lambda\beta}) + \\ + \nu (a_{\alpha\beta} b_{\lambda\mu} + 2b_{\alpha\beta} a_{\lambda\mu}), \quad (8.8)$$

$$A_{\alpha\beta\lambda\mu}^{(2)} = \frac{1 + \nu}{2} (2b_{\alpha\lambda} b_{\mu\beta} + 2b_{\alpha\mu} b_{\lambda\beta} - b_{\alpha\lambda}^e b_{\mu\alpha} a_{\mu\beta} - b_{\alpha\mu}^e b_{\mu\alpha} a_{\lambda\beta}) + \\ + \nu (b_{\alpha\beta}^e b_{\mu\alpha} a_{\lambda\mu} - 2b_{\alpha\beta} b_{\lambda\mu}), \quad (8.9)$$

$$A_{\alpha\beta\lambda\mu}^{(3)} = \frac{1 + \nu}{2} (b_{\alpha\lambda}^e b_{\mu\alpha} b_{\mu\beta} + b_{\alpha\mu}^e b_{\mu\alpha} b_{\lambda\beta}) - \nu b_{\alpha\beta}^e b_{\mu\alpha} b_{\lambda\mu}. \quad (8.10)$$

Weiterhin ist

$$Eth^* \gamma_{\alpha 3} = \lambda^2 L^2 (1 + \nu) \mu_{\alpha 3} \sigma^{3\lambda}, \quad (8.11)$$

$$Eth^* \gamma_{33} = \lambda^2 L^2 \{ \lambda^2 \sigma^{33} - \nu \mu_{\alpha\lambda} \sigma^{\alpha\lambda} \}. \quad (8.12)$$

Es werden nun in (8.5), (8.11) und (8.12) die Verzerrungsgrößen (7.3), (7.8) und (7.9) eingeführt:

$$Eth^* \{ x_{\alpha\beta} + \lambda \Theta w_{\alpha\beta} + \lambda^2 \Theta^2 \beta_{\alpha\beta} \} + \psi_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\alpha\lambda} \sigma^{\alpha\lambda}, \quad (8.13)$$

$$Eth^* \{ \mu_{\alpha}^e a_e \cdot W_{,3} + \lambda a \cdot W_{,\alpha} \} = \lambda^2 (1 + \nu) \mu_{\alpha 3} \sigma^{3\lambda}, \quad (8.14)$$

$$Eth^* a \cdot W_{,3} = \lambda^3 \sigma^{33} - \nu \lambda \mu_{\alpha\lambda} \sigma^{\alpha\lambda}. \quad (8.15)$$

In (8.13) ist gesetzt

$$\psi_{\alpha\beta} = Eth^* \eta_{\alpha\beta} + \nu \lambda^2 c_{\alpha\beta} \sigma^{33}. \quad (8.16)$$

## 9. Grundlagen der ersten Approximation

Alle bisher abgeleiteten Gleichungen sind exakt im Sinne der klassischen Elastizitätstheorie (Theorie infinitesimaler Verformungen). Das weitere Ziel der Schalentheorie besteht darin, den Längskraftensor  $n^{\alpha\beta}$  und den Momententensor  $m^{\alpha\beta}$  gemäß (3.1) bzw. (3.2) durch Verzerrungsgrößen auszudrücken, was auf Schwierigkeiten stößt, wie ein Blick auf (8.13) sofort ahnen läßt. Wird jedoch nur eine erste Approximation angestrebt, so weist (8.13) den einzuschlagenden Weg. Da die linke Seite dieser Gleichung als Reihenausdruck nach Potenzen von  $\lambda\Theta$  beginnt und die Größe  $A_{\alpha\beta\rho\lambda}$  auf der rechten Seite gemäß (8.6) ebenfalls einen nach Potenzen von  $\lambda\Theta$  entwickelten Ausdruck darstellt, liegt es nahe, die Spannungsgrößen  $\sigma^{ik}$  als Potenzreihen nach Potenzen von  $\lambda\Theta$  anzusetzen:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{(0)\alpha\beta} + \lambda\Theta\sigma^{(1)\alpha\beta} + \lambda^2\Theta^2\sigma^{(2)\alpha\beta} + \dots \quad (9.1)$$

$$\sigma^{(\alpha\beta)} = \sigma^{(0)(\alpha\beta)} + \lambda\Theta\sigma^{(1)(\alpha\beta)} + \lambda^2\Theta^2\sigma^{(2)(\alpha\beta)} + \dots \quad (9.2)$$

$$\sigma^{\alpha 3} = \sigma^{(0)\alpha 3} + \lambda\Theta\sigma^{(1)\alpha 3} + \lambda^2\Theta^2\sigma^{(2)\alpha 3} + \dots \quad (9.3)$$

$$\sigma^{3\alpha} = \sigma^{(0)3\alpha} + \lambda\Theta\sigma^{(1)3\alpha} + \lambda^2\Theta^2\sigma^{(2)3\alpha} + \dots \quad (9.4)$$

$$\sigma^{33} = \sigma^{(0)33} + \lambda\Theta\sigma^{(1)33} + \lambda^2\Theta^2\sigma^{(2)33} + \dots \quad (9.5)$$

Darin sind alle  $\sigma^{(n)}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Funktionen nur von  $\Theta_1, \Theta_2$ , aber nicht von  $\Theta$ .

Aus (2.12) folgt mit (2.13) und (9.1), (9.2) für die ersten beiden Reihenglieder

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta} &= \sigma^{(0)\alpha\beta}, \\ \sigma^{\alpha\beta} &= \sigma^{(0)\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( b_{\lambda}^{\alpha} \sigma^{\lambda\beta} - b_{\lambda}^{\beta} \sigma^{\lambda\alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Wird vorausgesetzt, daß die Reihen (9.1) bis (9.5) alle an konvergente Potenzreihen zu stellende Anforderungen erfüllen und daß für dünne Schalen

$$\lambda \ll 1, \quad (9.7)$$

so werden Approximationen möglich, indem die Reihenansätze nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abgebrochen werden. Die Anzahl der beibehaltenen Glieder bestimmt die Art der Approximation. Hier soll nur eine erste Approximation weiter verfolgt werden. Auf die Möglichkeiten zu weiteren Approximationen fortzuschreiten wird im Interesse der einfachen Darstellung der Theorie von vornherein verzichtet.

Die angesetzten Potenzreihen (9.1) bis (9.5) beschreiben die Verteilung der Spannungen über die Schalendicke. Dabei spielt in (9.1) bzw. (9.2) das für

$\Theta = 0$  übrigbleibende Glied  $\sigma^{(0)\alpha\beta}$  eine besondere Rolle. Es kann nämlich der Fall eintreten, daß bei sonst maßgebenden Werten von  $\sigma^{(r)\alpha\beta}$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) der Wert von  $\sigma^{(0)\alpha\beta}$  in wesentlichen Bereichen der Schale Null oder nahezu Null ist. Dies

würde bedeuten, daß die Spannungen in der Mittelfläche der Schale bedeutungslos sind, während die Spannungen in den übrigen Punkten der Schale durchaus wesentliche Werte annehmen können. Anschaulich ist dieser Fall verständlich. Die Schale ist vorwiegend auf Biegung beansprucht und die Längskräfte  $n^{(\alpha\beta)}$  sind von untergeordneter Bedeutung. Dieser Fall wird als „dehnungslose Verformung“ bezeichnet, wobei es genauer heißen müßte „verzerrungsfreie Verformung der Mittelfläche“.

Neben diesen Überlegungen spielt für die Entwicklung der ersten Approximation die in (8.16) eingeführte Größe

$$\psi_{\alpha\beta} = Eth^* \eta_{\alpha\beta} + \nu \lambda^2 c_{\alpha\beta} \sigma^{33} \quad (9.8)$$

eine entscheidende Rolle. Sie soll ebenfalls durch eine Reihe dargestellt werden. Die Bestimmung der ersten Glieder dieser Reihe stellt den nächsten Schritt der Untersuchung dar.

Für den in (6.2) auftretenden Vektor  $\mathbf{W}$  wird der Ansatz

$$\mathbf{W} = \Theta^{(1)} \mathbf{W}^{(1)} + \Theta^{(2)} \mathbf{W}^{(2)} + \dots \quad (9.9)$$

gemacht, worin  $\mathbf{W}^{(1)}, \mathbf{W}^{(2)}$  usw. Funktionen nur von  $\Theta_1, \Theta_2$  sind. Der Ansatz (9.9) berücksichtigt, daß für  $\Theta = 0$  der Vektor  $\mathbf{W}$  verschwinden muß, weil sonst in (6.2) der Vektor  $\mathbf{v}$  nicht als Verschiebungsvektor der Punkte der Mittelfläche erscheinen könnte, wie es sein muß.

Es wird (9.9) in (7.7) eingesetzt und nur Glieder bis  $\Theta$  berücksichtigt. Dies ergibt

$$\eta_{\alpha\beta} = \Theta^{(1)} \eta_{\alpha\beta}^{(1)} \quad (9.10)$$

mit

$$\eta_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{W}_{,\beta}^{(1)} + \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{W}_{,\alpha}^{(1)} \}. \quad (9.11)$$

Der Vektor  $\mathbf{W}$  wird durch seine Komponenten ausgedrückt:

$$\mathbf{W} = W_\alpha \mathbf{a}^\alpha + W_3 \mathbf{a}_3, \quad (9.12)$$

nach  $\Theta_\alpha$  differenziert

$$W_{,\alpha}^{(1)} = (W_{\lambda|\alpha}^{(1)} - b_{\lambda\alpha} W^{(1)}) \mathbf{a}^\lambda + (W_{,\alpha}^{(1)} + b_\alpha^e W^{(1)}) \mathbf{a}_e \quad (9.13)$$

und in (9.11) eingeführt:

$$\eta_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} \{ W_{\alpha|\beta}^{(1)} + W_{\beta|\alpha}^{(1)} - 2b_{\alpha\beta} W^{(1)} \}. \quad (9.14)$$

Mit Hilfe von (9.9) und (9.12) folgt aus (7.8) und (7.9)

$$\gamma_{\alpha 3} = L^2 W_\alpha^{(1)} + \dots \quad (9.15)$$

$$\gamma_{33} = \lambda L^2 W^{(1)} + \dots \quad (9.16)$$

In (8.11) und (8.12) werden eingesetzt (9.15), (9.16), die Reihenansätze (9.4), (9.5), ferner (1.13) und (1.15) beachtet und ein Koeffizientenvergleich bezüglich  $\Theta$  durchgeführt. Die Berechnung des jeweils ersten Gliedes ergibt

$$Et \overset{(1)}{W}_\alpha = \lambda^2 (1 + \nu) a_{\alpha\lambda} \overset{(0)}{\sigma^{3\lambda}}, \quad (9.17)$$

$$Et \overset{(1)}{W} = \lambda^3 \overset{(0)}{\sigma^{33}} - \nu \lambda a_{e\lambda} \overset{(0)}{\sigma^{e\lambda}}. \quad (9.18)$$

Damit wird aus (9.14)

$$Et \overset{(1)}{\eta}_{\alpha\beta} = \frac{\lambda^2}{2} (1 + \nu) \{ \overset{(0)}{\sigma^3}_{\alpha|\beta} + \overset{(0)}{\sigma^3}_{\beta|\alpha} \} - b_{\alpha\beta} \{ \lambda^3 \overset{(0)}{\sigma^{33}} - \nu \lambda \overset{(0)}{\sigma^e}_{\beta} \}. \quad (9.19)$$

Nun muß Klarheit über die in (9.19) auftretende Größe  $\overset{(0)}{\sigma^{33}}$  gewonnen werden. Zu diesem Zweck wird in (3.5) der Reihenansatz (9.5) eingesetzt und die Integration ausgeführt. In erster Näherung folgt

$$T = \lambda^3 \overset{(0)}{\sigma^{33}}. \quad (9.20)$$

In entsprechender Weise findet sich aus (3.4) mit (9.3)

$$l_x = \frac{\lambda^3}{12} \overset{(1)}{\sigma^{x3}}. \quad (9.21)$$

Diese beiden Ergebnisse werden in die Gleichung (5.4) eingesetzt und gleich noch (3.2) durch (9.1) ausgedrückt und (5.6) berücksichtigt. In erster Näherung ist

$$\lambda^2 \overset{(0)}{\sigma^{33}} = \frac{\lambda}{2} p + \frac{\lambda^2}{12} \overset{(1)}{\sigma^{x\beta}} + \frac{\lambda^3}{12} b_{\alpha\beta} \overset{(1)}{\sigma^{x3}}|_x \quad (9.22)$$

Schließlich ist noch  $\overset{(1)}{\sigma^{33}}$  zu bestimmen. Dazu wird von (2.16) ausgegangen und die Reihen (9.1), (9.3), (9.5) eingesetzt. Ein Koeffizientenvergleich bezüglich  $\Theta$  ergibt:

$$\overset{(1)}{\lambda \sigma^{33}} = -b_{e\lambda} \overset{(0)}{\sigma^{e\lambda}} + \overset{(0)}{\lambda \sigma^{x3}}|_x. \quad (9.23)$$

Nun sind alle Voraussetzungen getroffen, um  $\psi_{\alpha\beta}$  in der gewünschten Weise auszudrücken. Wird in (9.8) berücksichtigt (9.10), (9.19), (9.5) mit (9.22) und (9.23) sowie (1.15) und (1.12) beachtet, ergibt sich eine Reihe der Form

$$\psi_{\alpha\beta} = \overset{(1)}{\lambda \psi_{\alpha\beta}} + \overset{(2)}{\lambda^2 \psi_{\alpha\beta}} \quad (9.24)$$

mit

$$\overset{(1)}{\psi_{\alpha\beta}} = \frac{\nu}{2} a_{\alpha\beta} p + \nu \Theta b_{\alpha\beta} \overset{(0)}{\sigma^e}_{\beta},$$

$$\overset{(2)}{\psi_{\alpha\beta}} = \frac{\nu}{12} a_{\alpha\beta} b_{e\lambda} \overset{(1)}{\sigma^{e\lambda}} + \Theta \left\{ \frac{1 + \nu}{2} \left[ \overset{(0)}{\sigma^3}_{\alpha|\beta} + \overset{(0)}{\sigma^3}_{\beta|\alpha} \right] - \nu a_{\alpha\beta} b_{e\lambda} \overset{(0)}{\sigma^{e\lambda}} \right\}.$$

Berücksichtigung von (9.24) in (8.13) ergibt bei Beachtung von (1.15) und (8.6) sowie (9.1) die erste Approximation, wenn alle Glieder, die den Faktor  $\lambda'$  mit  $r > 1$  tragen, vernachlässigt werden. Der so gewonnene Ausdruck lautet:

$$Et\{x_{\alpha\beta} + \lambda\Theta(w_{\alpha\beta} + b_{\alpha}^{\alpha} x_{\alpha\beta})\} = A_{\alpha\beta\alpha\lambda}^{(0)}\sigma^{\alpha\lambda} + \\ + \lambda\Theta(A_{\alpha\beta\alpha\lambda}^{(0)}\sigma^{\alpha\lambda} + A_{\alpha\beta\alpha\lambda}^{(1)}\sigma^{\alpha\lambda} - \nu b_{\alpha\beta}^{(0)}\sigma_{\alpha}^{\alpha}). \quad (9.25)$$

Jetzt lassen sich alle Gleichungen angeben, die der ersten Approximation genügen, was im folgenden im einzelnen durchgeführt wird.

## 10. Membrantheorie

Es wird angenommen, daß

$$\sigma^{\alpha\beta} \neq 0, \quad (10.1)$$

was nicht ausschließt, daß in gewissen Bereichen der Schale, die relativ zum gesamten betrachteten Bereich klein sind, der Wert von  $\sigma^{\alpha\beta}$  Null oder nahezu Null sein kann.

Ist  $\lambda$  hinreichend klein, bietet sich als Approximation an, in (9.1) nur das erste Glied beizubehalten:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta}. \quad (10.2)$$

Aus (3.1) folgt dann

$$n^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} \quad (10.3)$$

und der Momententensor  $m^{\alpha\beta}$  ist zu vernachlässigen. Der durch (10.2) beschriebene Spannungszustand heißt Membranspannungszustand.

Mit gleicher Näherung ergibt (9.25)

$$Et x_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\alpha\lambda}^{(0)}\sigma^{\alpha\lambda} \quad (10.4)$$

oder

$$\sigma^{\alpha\beta} = DH^{\alpha\beta\alpha\lambda} x_{\alpha\lambda} \quad (10.5)$$

mit

$$D = \frac{Et}{1 - \nu^2} \quad (10.6)$$

$$H^{\alpha\beta\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \left\{ a^{\alpha\lambda} a^{\beta\alpha} + a^{\alpha\alpha} a^{\beta\lambda} + \nu (\varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\alpha} + \varepsilon^{\alpha\alpha} \varepsilon^{\beta\lambda}) \right\}. \quad (10.7)$$

Damit wird (10.3) zu

$$n^{\alpha\beta} = n^{(\alpha\beta)} = DH^{\alpha\beta\alpha\lambda} x_{\alpha\lambda}. \quad (10.8)$$

Die Vernachlässigung des Momententensor  $m^{\alpha\beta}$  führt die Gleichgewichtsbedingungen (5.1) und (5.2) über in

$$\left. \begin{aligned} n^{\alpha\beta} x_{\alpha} + p^{\beta} &= 0, \\ n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + p &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$



Dies System von Gleichungen ist vollständig und ermöglicht die Bestimmung des hier symmetrischen Tensors  $n^{\alpha\beta}$ . Es müssen jedoch bezüglich der erfüllbaren Randbedingungen Einschränkungen in Kauf genommen werden. Die Membrantheorie stellt daher einen Ausnahmefall der Schalentheorie dar, bei dem unter gewissen Voraussetzungen auf die Ermittlung des Momententensors  $m^{\alpha\beta}$  verzichtet werden kann.

## 11. Dehnungslose Verformungen

Es wird angenommen, daß

$$\overset{(0)}{\sigma}{}^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{Spannung des Nullfeldes} \quad (11.1)$$

oder nahezu Null ist, abgesehen von gewissen Bereichen, die relativ zum gesamten betrachteten Schalenbereich klein sind. Berücksichtigung von (11.1) in (9.25) liefert

$$\alpha_{\alpha\beta} = 0, \quad (11.2)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \overset{(0)}{A}_{\alpha\beta e\lambda} \overset{(1)}{\sigma}{}^{e\lambda}. \quad (11.3)$$

Aus (11.2) ist ersichtlich, daß die Mittelfläche keine Verzerrungen erleidet. Die Gleichgewichtsbedingungen für die hier betrachteten dehnungslosen Verformungen sind durch (5.1), (5.2) und (5.3) gegeben. Mit (3.8) lauten sie

$$n^{\alpha\beta}|_{\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} q^{\alpha} + p^{\beta} = 0, \quad (11.4)$$

$$n^{(\alpha\beta)} b_{\alpha\beta} + q^{\alpha}|_{\alpha} + p = 0, \quad (11.5)$$

$$m^{\alpha\beta}|_{\alpha} - q^{\beta} + c^{\beta} = 0, \quad (11.6)$$

worin berücksichtigt ist, daß

$$b_{\alpha\beta} n^{[\alpha\beta]} = 0.$$

Aus (3.2) errechnet sich mit (11.3)

$$m^{\alpha\beta} = B H^{\alpha\beta e\lambda} \omega_{e\lambda}, \quad (11.7)$$

worin

$$B = \frac{E t \lambda^2}{12(1 - \nu^2)} \quad (11.8)$$

und gemäß (7.5) mit (6.6)

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \{ & w|_{\alpha\beta} + w|_{\beta\alpha} + (b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda})|_{\beta} + (b_{\beta}^{\lambda} v_{\lambda})|_{\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda|\beta} + \\ & + b_{\beta}^{\lambda} v_{\lambda|\alpha} - 2b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} v \} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Wird noch (3.10)

$$n^{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} \{ b_{\alpha}^{\lambda} m^{\lambda\beta} - b_{\lambda}^{\beta} m^{\lambda\alpha} \} \quad (11.10)$$

und (3.8)

$$n^{\alpha\beta} = n^{(\alpha\beta)} + n^{[\alpha\beta]} \quad (11.11)$$

hinzugenommen, so bilden (11.2), (11.4) bis (11.6), (11.7), (11.9) und (11.10) ein vollständiges System von Gleichungen zur Bestimmung von  $n^{\alpha\beta}$ ,  $m^{\alpha\beta}$ ,  $v_\alpha$ ,  $w$ . Es werde bemerkt, daß für  $n^{\alpha\beta}$  eine (11.7) entsprechende Gleichung nicht vorkommt. Dies wird verständlich, wenn (11.1) in (9.2) eingeführt und dann (3.1) berechnet wird. Es ist

$$n^{(\alpha\beta)} = \frac{\lambda^{(2)}}{12} \sigma^{(\alpha\beta)}, \quad (11.12)$$

wenn in Übereinstimmung mit (9.7) nur das erste auftretende Glied der Reihe beibehalten worden ist. Da die erste Approximation nicht ausreicht,  $\sigma^{(\alpha\beta)}$  zu bestimmen, läßt sich mithin  $n^{(\alpha\beta)}$  nicht aus (11.12) berechnen.

## 12. Biegetheorie

Es werde die Annahme (10.1), daß

$$\sigma^{(\alpha\beta)} \neq 0 \quad (12.1)$$

ist, beibehalten. Im Gegensatz zur Membrantheorie werden jetzt aber in den Reihen (9.1) bzw. (9.2) alle Glieder bis einschließlich  $\lambda$  beibehalten, d. h. es sind alle Glieder vernachlässigt, bei denen  $\lambda^r$  mit  $r > 1$  als Faktor auftritt, so daß

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{(\alpha\beta)} + \lambda \Theta \sigma^{(1)}, \quad (12.2)$$

$$\sigma^{(\alpha\beta)} = \sigma^{(\alpha\beta)} + \lambda \Theta \sigma^{(1)}. \quad (12.3)$$

Dies in (3.9) und (3.2) eingeführt, ergibt

$$n^{(\alpha\beta)} = \sigma^{(\alpha\beta)}, \quad (12.4)$$

$$m^{\alpha\beta} = \frac{\lambda^2}{12} \sigma^{\alpha\beta}. \quad (12.5)$$

Da gemäß (3.8) und (3.10)

$$n^{\alpha\beta} = n^{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2} (b_\lambda^\alpha m^{\lambda\beta} - b_\lambda^\beta m^{\lambda\alpha})$$

wird mit (12.4) und (12.5) bei Beachtung der eingeführten Näherung

$$n^{\alpha\beta} = n^{(\alpha\beta)}. \quad (12.6)$$

Der Ausdruck (9.25) läßt sich weiter vereinfachen, wenn die Schale flach ist. Für flache Schalen, deren Belastung vorwiegend normal zur Mittelfläche wirkt, gilt

$$b_\beta^\lambda = \varepsilon d_\beta^\lambda \quad (12.7)$$

$$b_\beta^\lambda b_\alpha^\lambda = \varepsilon^2 d_\beta^\lambda d_\alpha^\lambda, \quad (12.8)$$

$$b_\beta^\lambda \chi_{\alpha\lambda} \ll \omega_{\mu\nu}. \quad (12.9)$$

Darin bedeutet

$$\varepsilon = \frac{L}{R} < 1, \quad \varepsilon^2 \ll 1, \quad (12.10)$$

worin  $L$  wie bisher eine charakteristische Längenabmessung und  $R$  den kleinsten Krümmungsradius angibt.

Mit (12.9) folgt aus (9.25)

$$Et\chi_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta e\lambda}^{(0)} \sigma^{e\lambda}, \quad (12.11)$$

$$Et\omega_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta e\lambda}^{(0)} \sigma^{e\lambda}. \quad (12.12)$$

Für flache Schalen kann weiterhin angenommen werden, daß sich der Krümmungstensor  $b_{\beta}^{\lambda}$  nur wenig ändert, so daß

$$b_{\beta}^{\lambda}|_e \ll b_{\beta}^{\lambda}. \quad (12.13)$$

Damit gilt gemäß (7.5) mit (6.6)

$$\omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(w|_{\alpha\beta} + w|_{\beta\alpha}) - b_{\alpha}^{\lambda}v_{\lambda|\beta} - b_{\beta}^{\lambda}v_{\lambda|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda}b_{\lambda\beta}w \quad (12.14)$$

Mit (7.4) kann geschrieben werden

$$\omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(w|_{\alpha\beta} + w|_{\beta\alpha}) - b_{\alpha}^{\lambda}\chi_{\lambda\beta} - b_{\beta}^{\lambda}\chi_{\lambda\alpha} - (b_{\alpha}^{\lambda}b_{\lambda\beta} + 2b_{\beta}^{\lambda}b_{\lambda\alpha})w$$

oder, wenn (12.9) und (12.8) mit (10.10) berücksichtigt wird,

$$\omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(w|_{\alpha\beta} + w|_{\beta\alpha}). \quad (12.15)$$

Aus (12.10) folgt weiterhin, daß bei  $z$ -veimaliger kovarianter Ableitung die Indizes vertauschbar sind. Um dies einzusehen, werde die zweimalige kovariante Ableitung eines Tensors  $B_e$  betrachtet, für die gilt

$$B_{e|\lambda} - B_{e|\mu\lambda} = R_{e\lambda\mu}^{\alpha} B_{\alpha},$$

worin

$$R_{e\lambda\mu}^{\alpha} = (b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2) a_{\beta e} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu}.$$

Mit (12.8) und (12.10) folgt dann

$$B_{e|\lambda\mu} = B_{e|\mu\lambda} \quad (12.16)$$

und dementsprechend

$$w|_{\alpha\beta} = w|_{\beta\alpha}, \quad (12.17)$$

so daß

$$\omega_{\alpha\beta} = -w|_{\alpha\beta}. \quad (12.18)$$

Aus (12.4) und (12.5) folgt mit (12.6), (12.11) und (12.12)

$$n^{\alpha\beta} = n^{(\alpha\beta)} = DH^{\alpha\beta e\lambda} \chi_{e\lambda}, \quad (12.19)$$

$$m^{\alpha\beta} = m^{\beta\alpha} = -BH^{\alpha\beta e\lambda} w|_{e\lambda}, \quad (12.20)$$

worin

$$B = \frac{Et\lambda^2}{12(1-\nu^2)}. \quad (12.21)$$

Die Größen  $D$  und  $H^{\alpha\beta}e^\lambda$  sind bereits in (10.6) und (10.7) angegeben. Die Gleichgewichtsbedingungen (5.1) vereinfacht sich jetzt mit der gleichen Art der Näherung und  $p^\beta = 0$  zu

$$n^{\alpha\beta}|_\alpha = 0, \quad (12.22)$$

während die übrigen Gleichgewichtsbedingungen unverändert bleiben:

$$n^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + q^\alpha|_\alpha + p = 0, \quad (12.23)$$

$$m^{\alpha\beta}|_\alpha - q^\beta = 0, \quad (12.24)$$

wenn  $c^\beta = 0$  gesetzt wird.

Die Gleichgewichtsbedingungen (12.22) bis (12.24) stellen zusammen mit den Gleichungen (12.19) und (12.20) das vollständige System von Gleichungen zur Ermittlung des Spannungs- und Verformungszustandes der flachen Schalen dar.

Außer den flachen Schalen kommt im Rahmen der Biegetheorie dem Randstö-  
rungsproblem besondere Bedeutung zu. Das Randstö-  
rungsproblem tritt auf, wenn die Schale keine Flächenlasten trägt, sondern nur an ihren Rändern  
Kräfte oder Momente angreifen. Der Spannungszustand ist dadurch gekenn-  
zeichnet, daß die von den Rändern ausgehenden Wirkungen in Richtung nor-  
mal zu den Rändern verlaufender geodätischer Linien schnell abklingen, also  
nur eine schmale Zone im Bereich der Ränder beansprucht wird. Diese schmale  
Zone verhält sich bezüglich der abklingenden Spannungen wie eine flache  
Schale (Abb. 3). Wenn in den dazu rechtwinkligen Richtungen die geometrischen  
Voraussetzungen der flachen Schalen nicht erfüllt sind, können die zugeordne-  
ten Komponenten des Momententensors  $m^{\alpha\beta}$  nur unbedeutende Werte anneh-  
men wie in der Membrantheorie und daher vernachlässigt werden. Das Rand-  
stö-  
rungsproblem wird demgemäß von den gleichen Gleichungen beherrscht wie  
die flachen Schalen.

Die Biegetheorie umfaßt mithin die flachen Schalen und das Randstö-  
rungs-  
problem.

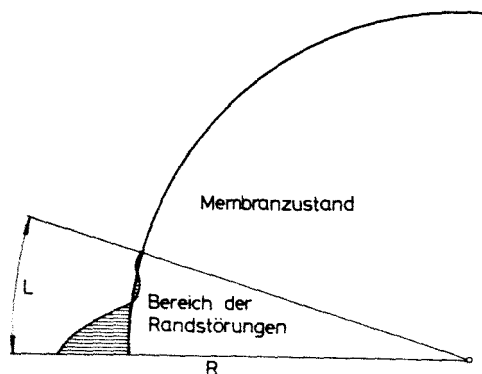


Abb. 3. Bereich der Randstörungen  
als flache Schale

### 13. Allgemeine Schalengleichungen

Aus den bisher abgeleiteten Gleichungen lassen sich durch entsprechende Zusammenfassung allgemeine Schalengleichungen aufstellen, die dann die Membrantheorie, die dehnungslosen Verformungen, die flachen Schalen und die Randstörungen als Sonderfälle enthalten.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind (5.1), (5.2) und (5.3) zu entnehmen. Mit  $c^\beta = 0$  lauten sie

$$\left. \begin{aligned} n^{\alpha\beta}|_\alpha - b_\lambda^\beta q^\lambda + p^\beta &= 0, \\ n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + q^\alpha|_\alpha + p &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

$$m^{\alpha\beta}|_\alpha - q^\beta = 0. \quad (13.2)$$

Die Spannungs-Verzerrungsgleichungen folgen aus (10.8), (11.7) und (3.8) mit (3.10)

$$n^{\alpha\beta} = DH^{\alpha\beta\varrho\lambda} \chi_{\varrho\lambda} + \frac{1}{2} (b_\lambda^\lambda m^{\lambda\beta} - b_\lambda^\beta m^{\lambda\lambda}). \quad (13.3)$$

$$m^{\alpha\beta} = BH^{\alpha\beta\varrho\lambda} \omega_{\varrho\lambda}, \quad (13.4)$$

mit

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_\alpha|_\beta + v_\beta|_\alpha - 2b_{\alpha\beta} w). \quad (13.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (w|_{\alpha\beta} + w|_{\beta\alpha} + (b_\lambda^\lambda v_\lambda)|_\beta + (b_\beta^\lambda v_\lambda)|_\alpha + \\ + b_\lambda^\lambda v_\lambda|_\beta + b_\beta^\lambda v_\lambda|_\alpha - 2b_\alpha b_{\lambda\beta} w. \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

Diese Gleichungen sind zu ergänzen durch die Randbedingungen an den Rändern der Schale, worauf hier jedoch nicht eingegangen werden soll.

### Literatur

- [1] A. E. H. Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, erste Auflage Oxford 1892.
- [2] P. M. Naghdi: Foundations of Elastic Shell Theory, Progr. Solid Mechanics, Vol. IV, Amsterdam 1963.
- [3] A. E. Green und P. M. Naghdi: Quart. J. Mech. and App. Math. **3** (1965) S. 257.
- [4] K. Heuck: ZAMM **45** (1965) S. 185.
- [5] W. Zerna: ZAMM **42** (1962) S. 333.
- [6] A. E. Green und W. Zerna: Theoretical Elasticity, Oxford 1954. 2. Aufl. 1967.